PART4 関数の最大・最小

要点整理と公式

要点 ① 関数の最大・最小

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ。

関数の最大値，最小値は，関数の増減および極値を調べることにより，それらの極値と区間の端点における関数の値との大小を比較して求める。

(ex) 関数 $f(x)=x+\sqrt{9-x^2}$ の最大値・最小値について

この関数の定義域は　　　　　　より $-3\leqq x\leqq 3$

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$f'(x)=0$ とすると $\sqrt{9-x^2}=x$ ……　①

①の両辺を 2 乗すると

$$9-x^2=x^2 \qquad x^2=\frac{9}{2} \qquad \text{①より } x\geqq 0 \text{ なので } x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下

x	-3	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	3
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	-3	↗	極大 $3\sqrt{2}$	↘	3

したがって，$f(x)$ は

$x=$　　　のとき　最大値

$x=$　　のとき　最小値

をとる。

[MEMO]

4 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $f(x)=-x+e^x \ (-2 \leqq x \leqq 1)$　　(2) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

Point Pickup

関数の最大・最小

閉区間 $[a,\ b]$ における $f(x)$ の最大・最小は，増減を調べ，
「極値」と「$f(a)$，$f(b)$（端点における関数の値）」を比較して決定する。

第11講 PART4 確認問題

1 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ は,

$x=$ [ア] のとき最大値 [イ]

$x=$ [ウ] のとき最小値 [エ]

をとる。

ただし, [イ], [エ] は下の①～④のうちから選べ。

① 0　　② e

③ $\dfrac{e^2}{4}$　　④ $\dfrac{e^3}{9}$

2 関数 $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ は,

$x=$ [オ] のとき最大値 [カ]

$x=$ [キク] のとき最小値 [ケコ]

をとる。

PART4 関数の最大・最小

4 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $f(x)=-x+e^x\ (-2\leqq x\leqq 1)$　　(2) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

[解答]

(1) $f'(x)=-1+e^x$

$f'(x)=0$ とすると $e^x=1$ より $x=0$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	／
$f(x)$	$2+\dfrac{1}{e^2}$	↘	1	↗	$-1+e$

したがって，$f(x)$ は

$x=-2$ のとき　最大値 $2+\dfrac{1}{e^2}$，$x=0$ のとき　最小値 1　をとる。

(2) 関数 $f(x)$ の定義域は $1-x^2\geqq 0$ より $-1\leqq x\leqq 1$

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)=0$ とすると $1-2x^2=0$ より $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

したがって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　最大値 $\dfrac{1}{2}$，$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

第11講 PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：②，ウ：2，エ：③

[解説]

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=2$

よって，$1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は

次のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗	$\frac{e^3}{9}$

[A]

ここで，$2<e<3$ だから，

$$e-\frac{e^3}{9}=\frac{e}{9}(9-e^2)>0$$ [B]

よって，$e>\frac{e^3}{9}$

したがって，$f(x)$ は，

$x=1$ のとき最大値 e

$x=2$ のとき最小値 $\frac{e^2}{4}$

をとる。

[A] 定義域の範囲で $f(x)$ の増減表をつくる。

[B] 最大値は e と $\frac{e^3}{9}$ のどちらであるかを考える。

2　**[正解] オ：2，カ：4，キク：−2，ケコ：−4**

[解説]

$f(x)$ の定義域は，$8-x^2 \geqq 0$ より，

$$-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$$

$$f'(x)=\sqrt{8-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}$$

$$=\frac{(8-x^2)-x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$=-\frac{2(x+2)(x-2)}{\sqrt{8-x^2}}$$

よって，$-2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	0	↘	-4	↗	4	↘	0

[C]

[C]　定義域の範囲で $f(x)$ の増減表をつくる。

したがって，$f(x)$ は，

$x=2$ のとき最大値 4

$x=-2$ のとき最小値 −4

をとる。